ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

С.С.МИРЗОЕВ, А.М.МАМЕДОВ
Бакинский Государственный Университет,
Нахчиванский Государственный Университет
mirzoevsabir@mail.ru

В работе получены достаточные условия на коэффициенты операторно-дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа, которые обеспечивают регулярную разрешимость некоторой краевой задачи на полуоси в весовых пространствах типа Соболева.

Ключевые слова: гильбертого пространство, регулярное решение, пространство с весом, нормальные операторы

Пусть H -сепарабельное гильбертово пространство, A -нормальный обратимый оператор в H. Тогда A можно представить в виде $A = UC$, где C - самосопряженный положительный оператор, а U -унитарный оператор, причем $D(A) = D(C)$ и при $x \in D(A)$ $UCx = CUx$. Область определения оператора $C^{\alpha}\ (\alpha \ge 0)$ превращается в гильбертово пространство H относительно скалярного произведения $(x, y)_{\alpha} = (C^{\alpha}x, C^{\alpha}y)$.

Обозначим через $L(R_+; H)$ гильбертово пространство функций $f(t)$ определенных в $R_+ = (0;\infty)$ почти всюду, со значениями в H, квадратично интегрируемых, для которых

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)} = (\int_0^{\infty} \|f(t)\|^2 dt)^{1/2} < \infty .$$

Далее введем гильбертово пространство [1]

$$W_2^2(R_+; H) = \{u : u'' \in L_2(R_+; H), C^2u \in L_2(R_+; H)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} = \left(\|u''\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|C^2u\|^2_{L_2(R_+;H)}\right)^{1/2}.$$

В этой работе, везде производные понимаются в смысле теории распределений. При $\gamma \in (-\infty,+\infty)$ определим следующие пространства

$$L_{2,\gamma}(R_+;H) = \left\{ f : f(t)e^{-\gamma t} \in L_2(R_+;H) \right\}$$

с нормой

$$\| f \|_{L_{2,\gamma}(R_+;H)} = (\int_0^\infty \| f(t) \|^2 e^{-2\gamma t} dt)^{1/2}$$

и

$$W_{2,\gamma}^2(R_+;H) = \left\{ u : u'' \in L_{2,\gamma}(R_+;H), C^2 u \in L_{2,\gamma}(R_+;H) \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_{2,}^2(R_+;H} = \left(\|u''\|^2{}_{L_{2,\gamma}(R_+;H} + \|C^2 u\|_{L_{2,}(R_+;H} \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим в H краевую задачу

$$P(d(dt)u(t)) = -u''(t) + A_1 u'(t) + A_2 u(t) + A^2 u(t) = f(t), \quad t \in R_+ \quad , \tag{1}$$

$$u'(0) = 0 \quad , \tag{2}$$

где $f(t), u(t)$ -функции со значениями в H, а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) A-нормальный обратимый оператор, спектр которого содержится в угловом секторе $S_\varepsilon = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| < \varepsilon \right\}$, где $\varepsilon \geq 0$;

2) операторы $B_1 = A_1 A^{-1}$ и $B_2 = A_2 A^{-2}$ ограничены в H.

<u>Определение.</u> Если при любом $f(t) \in L_{2,\gamma}(R_+ : H)$ существует функция $u(t) \in W_{2,\gamma}^2(R_+;H)$ удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в R_+, краевому условию (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t \to +0} \|u'(t)\|_{1/2} = 0$$

и оценке

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(R_+:H)} \leq const \| f \|_{L_{2,\gamma}(R_+:H)},$$

то будем называть задачу (1), (2) регулярно разрешимой в $W_{2,\gamma}^2(R_+ : H)$.

В данной работе мы находим условия на операторные коэффициенты уравнения (1), которые обеспечивают регулярную разрешимость задачи (1), (2) в некоторых пространствах $W_{2,\gamma}^2(R_+;H)$. Отметим, что регулярная разрешимость некоторых краевых задач в пространствах с весом, когда A самосопряженный оператор, исследованы, например, в работах [2-8].

Обозначим через

$$W_2^2(R_+ : H) = \left\{ v : v \in W_2^2(R_+ : H), v'(0) = \gamma v(0) \right\}$$

После замены $v(t) = e^{-\gamma t} u(t)$ получаем следующую задачу:

$$-\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)^2 v + A^2 v + A_1 (\frac{d}{dt} + \gamma) v + A_2 v = g(t), t \in R_+ \quad , \tag{3}$$

$$v(0) + \gamma v'(0) = 0 \, . \tag{4}$$

Задачу (3), (4) напишем в виде уравнения:

$$P_\gamma v = P_{0,\gamma} v + P_{1,\gamma} v = g \, , \tag{5}$$

где $g \in L_2(R_+; H),\ v \in W_2\,(R_+; H)$, $P_{0,\gamma} v = -\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)^2 v + A^2 v$, $P_{1,\gamma} v = A_1 (\frac{d}{dt} + \gamma) v + A_2 v.$

Очевидно, что регулярная разрешимость задачи (1), (2) эквивалентно корректной разрешимости уравнения (5).

Имеет место

Теорема 1. Пусть выполняется условие 1 и $|\gamma| < \mu_1 \cos\varepsilon,\ \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, где $\mu_1 = \inf\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$. Тогда оператор $P_{0,\gamma}$ изоморфно отображает пространство $\overset{0}{W}{}_2^2(R_+; H)$ на $L_2(R_+; H)$.

Доказательство. Очевидно, что уравнение $-\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)^2 v + A^2 v = 0$ имеет общее решение из пространства $W_2^2(R_+ : H)$ функцию $v_\gamma(t) = e^{-(A+\gamma)t}\varphi,\ \varphi \in H_{3/2}$. Из условия (5) следует, что $-(A - \gamma E)\varphi + \gamma\varphi = 0$, т.е. $\varphi = 0$. Следовательно, $v_\gamma(t) = 0$, т.е. $Ker P_{0,\gamma} = 0.$ Покажем, что образ оператора $P_{0,\gamma}$ совпадает с $L_2(R_+; H)$. Пусть $g(t) \in L_2(R_+; H)$ и $g_1(t) = g(t),$ при $t \in R_+$, $g_1(t) = 0,$ при $t = (-\infty, 0)$. Если $\hat{g}_1(\xi)$ есть преобразование Фурье вектор-функции $g_1(t)$, и

$$v_{1,\gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-(i\xi + \gamma)^2 E + A^2)^{-1} \hat{g}_1(\xi) e^{i\xi t} d\xi, \quad t \in R,$$

то $v_{1,\gamma}(t)$ удовлетворяет уравнению $-\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)^2 v + A^2 v = g(t)$ почти всюду в R_+. Покажем, что $v_{1,\gamma}(t) \in W_2^2(R; H)$. Из теоремы Планшереля следует, что достаточно доказать, что $A^2 \hat{v}_{1,\gamma}(\xi),\ \xi^2 \hat{v}_{1,\gamma}(\xi) \in L_2(R, H)$.

$$\left\|A^2\hat{v}_{1,\gamma}(\xi)\right\|_{L_2(R;H)}=\left\|A^2((i\xi+\gamma)^2E-A^2)^{-1}\hat{g}_1(\xi)\right\|_{L_2(R;H)}=\sup_{\xi\in R}\left\|A^2((i\xi+\gamma)^2E-A^2)^{-1}\right\|\cdot\|g\|_{L_2(R_+:H)}$$

и при любом $\xi\in R$

$$\left\|A^2((i\xi+\gamma)^2-A^2)^{-1}\right\|=\sup_{\sigma\in\sigma(A)}\left|(\sigma^2(i\xi+\gamma)^2-\tau^2)^{-1}\right|=\sup_{\sigma\in\sigma(A)}\left|\sigma^2((\sigma+\gamma^2)+\xi^2)^{-1/2}((\sigma-\gamma^2)+\xi^2)^{-1/2}\right|\le$$

$$\le\sup_{\sigma\in\sigma(A)}\left|\sigma(\sigma+\gamma)^{-1}\right|\cdot\left|\sigma(\sigma-\gamma)^{-1}\right|\le\sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu(\mu\cos\varepsilon+\gamma)^{-1}\right|\cdot\left|\mu(\mu\cos\varepsilon-\gamma\ )^{-1}\right|=\mu_1^2\left(\mu_1^2\cos^2\varepsilon-\gamma^2\right)^{-1},$$

т.е. $A^2\hat{v}_{1,\gamma}(\xi)\in L_2(R;H)$.

Аналогично доказывается, что $\xi^2\hat{v}_{1,\gamma}(\xi)\in L_2(R;H)$.

Теперь будем искать решение уравнение $P_{0,\gamma}u=f$ в виде $v=\bar{v}_{1,\gamma}(t)+e^{-(A+\gamma E)t}\varphi,\ \varphi\in H_{3/2}$, где $\bar{v}_{1,\gamma}(t)$ -сужение функции $v_{1,\gamma}(t)$ на $[0;\infty)$. Тогда $\bar{v}_{1,\gamma}(t)\in W_2^2(R_+;H)$ и по теореме о следах $\bar{v}_{1,\gamma}(0)\in H_{3/2},\bar{v}'_{1,\gamma}(0)\in H_{1/2}$. Из условия $\bar{v}_{1,\gamma}(0)+\gamma\bar{v}'_{1,\gamma}(0)=0$ получаем, что $\varphi=A^{-1}(\bar{v}'_{1,\gamma}(0)+\gamma\bar{v}'_{1,\gamma}(0))\in H_{3/2}$. Следовательно, $v\in W_2^2(R_+;H)$. Далее из неравенства $\left\|P_{0,\gamma}v\right\|_{L_2(R_+;H)}\le const\|v\|_{L_2(R_+;H)}$ и из теоремы Банаха об обратном операторе следует утверждение теоремы.

Лемма. Пусть выполняется условия 1) с $0\le\varepsilon\le\pi/4$ и $|\gamma|<\mu_1(\cos 2\varepsilon)^{1/2}$. Тогда при любом $v\in W_2^2(R_+:H)$ имеет место неравенства

$$\left\|A^2v\right\|_{L_2(R_+;H)}\le c_0(\gamma,\varepsilon)\left\|P_{0,\gamma}v\right\|_{L_2(R_+;H)}, \tag{6}$$

$$\left\|A\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\ v\right\|_{L_2(R_+;H)}\le c_1(\gamma;\varepsilon)\left\|P_{0,\gamma}v\right\|_{L_2(R_+;H)}\ , \tag{7}$$

где

$$c_0(\gamma;\varepsilon)=(\cos 2\varepsilon-\gamma^2\mu_1^{-2})^{-1},$$

$$c_1(\gamma,\varepsilon)=\begin{cases}\left(\left(\frac{1}{4}\cos 2\varepsilon-\gamma^2\mu_1^{-2}\right)^{-1}+\gamma^2\mu_1^{-4}\cdot\left(\cos 2\varepsilon-\gamma^2\mu_1^{-2}\right)\right)^{-1/2},\gamma\ge 0\\ \frac{1}{2}\left(\cos 2\varepsilon-\gamma^2\mu_1^{-2}\right)^{-1/2}+|\gamma|\mu^{-2}\left(\cos 2\varepsilon-\gamma^2\mu_1^{-2}\right)^{-1},\ \gamma<0.\end{cases}$$

Доказательство. Из уравнения (3) следует, что

$$-\operatorname{Re}\left(\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)^2 v, C^2 v\right)_{L_2(R_+;H)} + \operatorname{Re}\left(A^2 v, C^2 v\right)_{L_2(R_+;H)} = \operatorname{Re}\left(g, C^2 v\right)_{L_2(R_+;H)} . \quad (8)$$

После интегрирования по частям получаем, что

$$-\left(\frac{d^2 v}{dt^2}, C^2 v\right)_{L_2(R_+;H)} = \|Cv'\|^2_{L_2(R_+;H)} - \gamma(C^{1/2}v'(0), C^{3/2}v(0)) \quad (9)$$

$$2\gamma \operatorname{Re}\left(\frac{dv}{dt}, C^2 v\right)_{L_2(R_+;H)} = -\gamma(C^{1/2}v(0), C^{3/2}v(0)) \quad (10)$$

Очевидно, что

$$\gamma^2 \operatorname{Re}(v, C^2 v)_{L_2(R_+;H)} \le \gamma^2 \|Cv\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \gamma^2 \mu_1^{-2} \|C^2 v\|^2_{L_2(R_+;H)} , \quad (11)$$

$$\operatorname{Re}(A^2 v, C^2 v)_{L_2(R_+;H)} \ge \cos 2\varepsilon \|C^2 v\|^2_{L_2(R_+;H)}. \quad . \quad (12)$$

Учитывая соотношения (9)-(12) в (8), получаем, что

$$\|Cv'\|^2_{L_2(R_+;H)} + (\cos 2\varepsilon - \gamma^2 \mu_1^{-2})\|C^2 v\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \|g\|_{L_2(R_+;H)} \cdot \|C^2 v\|_{L_2(R_+;H)} . \quad (13)$$

Отсюда получаем, что

$$\|C^2 v\|_{L_2(R_+;H)} \le (\cos 2\varepsilon - \gamma^2 \mu_1^{-2})^{-1} \|g\|_{L_2(R_+;H)} = c_0(\varepsilon,\gamma)\|P_{0,\gamma} v\|_{L_2(R_+;H)} . \quad (14)$$

Далее, из (14) при любом $\delta > 0$ получаем

$$\|Cv'\|^2_{L_2(R_+;H)} + (\cos 2\varepsilon - \gamma^2 \mu_1^{-2})\|C^2 v\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \frac{\delta}{2}\|g\|^2 + \frac{1}{2\delta}\|C^2 v\|^2_{L_2(R_+;H)} .$$

Выбирая $\frac{1}{2\delta} = (\cos 2\varepsilon - \gamma^2 \mu_1^{-2})$, получаем, что

$$\|Cv'\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{4}(\cos 2\varepsilon - \gamma^2 \mu_1^{-2})^{-1} \|g\|^2_{L_2(R_+;H)} , \quad (15)$$

т.е.

$$\|Cv'\|_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{2}(\cos 2\varepsilon - \gamma^2 \mu_1^{-2})^{-1/2} \|P_{0,\gamma} v\|_{L_2(R_+;H)} . \quad (16)$$

С другой стороны, при $\gamma \ge 0$

$$
\begin{aligned}
&\left\| A(\frac{d}{dt}+\gamma)v \right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\| C(\frac{d}{dt}+\gamma)v \right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \|Cv'\|^2_{L_2(R_+;H)} + \gamma^2 \|v\|^2_{L_2(R_+;H)} - \gamma(Cv(0),v(0)) \le \\
&\le \|Cv'\|^2_{L_2(R_+;H)} + \gamma^2 \|v\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \|Cv'\|^2_{L_2(R_+;H)} + \gamma^2 \cdot \mu^{-4} \|C^2 v\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \\
&\le \left(\frac{1}{4}\left(\cos 2\varepsilon - \gamma^2\mu^{-2}\right)^{-1} + \gamma^2\mu^{-4}\left(\cos 2\varepsilon - \gamma^2\mu^{-2}\right)^{-2} \right) \|g\|^2_{L_2(R_+;H)} = c_1^2(\gamma,\varepsilon) \|P_{0,\gamma} v\|^2_{L_2(R_+;H)}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

При $\gamma < 0$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\left\| A(\frac{d}{dt}+\gamma)v \right\|_{L_2(R_+;H)} \le \left\| C\frac{dv}{dv} \right\| + |\gamma| \|\upsilon\|_{L_2(R_+;H)} \le \left(\frac{1}{2}(\cos 2\varepsilon - \gamma^2\mu^{-2}) \right)^{-1/2} + \\
&+ |\gamma|\mu^{-2} \cdot (\cos 2\varepsilon - \gamma^2\mu^{-2})^{-1}) \|g\|^2_{L_2(R_+;H)}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Лемма доказана.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 2. Пусть выполняется условия 1) при $0 \le \varepsilon \le \pi/4$, и 2), причем,

$$\alpha(\gamma,\varepsilon) = c_1(\varepsilon,\gamma)\|B_1\| + c_0(\varepsilon,\gamma)\|B_2\| < 1,$$

где $c_1(\varepsilon,\gamma)$ и $c_0(\varepsilon,\gamma)$ определены из леммы. Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима в $W^2_{2,\gamma}(R_+;H)$ при $|\gamma| < \mu_1(\cos 2\varepsilon)^{-1/2}$.

Доказательство. Докажем корректно разрешимость уравнения (5).Напишем уравнение (5) в виде $\omega + P_{1,\gamma}P^{-1}_{0,\gamma}\omega = g$, где $\omega = P_{0,\gamma}v$ и покажем, что $\|P_{1,\gamma}P^{-1}_{0,\gamma}\| < 1$.Действительно, для любого $\omega \in L_2(R_+;H)$

$$
\begin{aligned}
&\|P_{1,\gamma}P^{-1}_{0,\gamma}\omega\|_{L_2(R_+;H)} = \|P_{1,\gamma}v\|_{L_2(R_+;H)} \le \|B_1\| \left\| A(\frac{d}{dt}+\gamma)v \right\|_{L_2(R_+;H)} + \|B_2\| \|A^2 v\|_{L_2(R_+;H)} \le \\
&\le \left(c_1(\gamma,\varepsilon)\|B_1\| + c_0(\gamma,\varepsilon)\|B_2\|\right) \|P_{0,\gamma}v\|_{L_2(R_+;H)} = \alpha(\gamma,\varepsilon)\|\omega\|_{L_2(R_+;H)}.
\end{aligned}
$$

Здесь мы учитывали неравенства (6) и (7) из леммы. Так как $\alpha(\gamma,\varepsilon) < 1$, то оператор $E + P_{1,\gamma}P^{-1}_{0,\gamma}$ обратим в $L_2(R_+;H)$, $v = P^{-1}_{0,\gamma}(E + P_{1,\gamma}P^{-1}_{0,\gamma})^{-1} g$ и

$$\|v\|_{L_2(R_+;H)} \le const\|g\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Madженес Э. Неоднородные краевые задачи и их приложение. М.: Мир, 1971, 371с.
2. Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в весовых пространствах //Линейные операторы и их приложения, Баку, 1989, с.46-49.
3. Алиев А.Р., Гумбаталиев Р.З. О разрешимости одной краевой задачи в пространстве с весом // Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-матем. наук, 2003, №2, с.47-57.
4. Мирзоев С.С., Мамедов Э.Н. О регулярной разрешимости одной краевой задачи в весовых пространствах// Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-матем.наук, 2006, №3, с.33-43.
5. Mirzoev S.S., Gumbataliyev R.Z. On Normal Solvability of Boundary Value Problems for Operator-Differential Equations on Semi-axis in Weight Space// Taiwanes Journal of Mathematics, 2010, v.5, No4, p.1637-1650.
6. Гумбаталиев Р.З. Нормальная разрешимость краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка в весовом пространстве //Дифферен. уравнения, 2010, т.6, в.5, с.678-686.
7. Gumbataliyev R.Z. On Regular Solvability of Boundary Value Problems in Weight Space // International Journal of Mathematical Analysis, 2007, No25, p.1207-1216.
8. Гумбаталиев Р.З. О разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка в пространстве с весом// Естественные и технические науки, М., 2006, №4(18), с.34-42.

ÇƏKİLİ FƏZALARDA BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

S.S.MİRZƏYEV, Ə.M.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Məqalədə elliptik tip ikinci tərtib operator diferensial tənliklər üçün qoyulmuş bir sinif sərhəd məsələsinin requlyar həll olunmasını təmin edən və tənliyin əmsallarının xassələri ilə verilən kafi şərtlər tapılmışdır.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, requlyar həll, çəkili fəza, normal operatorlar

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM ON WEIGHT SPACES

S.S.MIRZAYEV, A.M.MAMMADOV

SUMMARY

In this work the satisfactory conditions on the coefficients of second order elliptic type operator-differential equations are received, which guarantee the regular solvability of some boundary value problem on semiaxis on Sobolev type weight spaces.

Key woods: Hilbert space, regular solution, weight space, normal operator

Поступила в редакцию: 17.11.2013 г.
Подписано к печати: 27.12.2013 г.